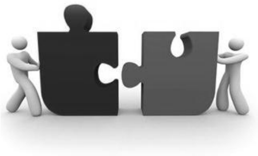
الباب الأول:

مبادئ المنطق الرياضي

١–١	التقارير
١–٢	أدوات الربط
١–٣	العبارات المتكافئة
١–٤	التناقض
١–٥–أ	التسوير
١–٦–أ	نفي أدوات التسوير
١–٧–أ	طرق البرهان
١–٥–ب	العبارات المسورة
١–٦–ب	نفي العبارات المسورة
١–٧–ب	طرق البرهان
١–٨	قواعد الأستدلال الخاصة بعبارات التسوير
١–٩	الأستنتاج الرياضي



الباب الأول: مبادئ المنطق الرياضي

ELEMENTS OF MATHEMATICAL LOGIC

إن دراسة المنطق هو دراسة للقواعد والطرق التي تستخدم في تمييز البراهين الصحيحة عن تلك غير الصحيحة وتعتبر التقارير نقطة البداية في دراسة المنطق والتي سنتناولها فيما يلي:

١-١ :التقارير (Statements)

تقسم الجمل في المنطق إلى قسمين هما:

١- جمل خبرية وهي التي تحمل إلينا خبر ما.

٢- جمل غير خبرية وهي التي لا تحمل خبراً معيناً.

تعريف (١-١-١)

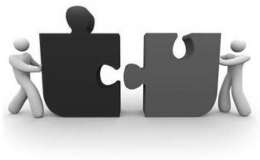
كل جملة خبرية تحمل خبراً ما يمكن الحكم بأنها إما صائبة و إما خاطئة ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد تسمى تقريراً، وكل تقرير يحمل خبراً واحداً يسمى تقريراً بسيطاً أما إذا حمل التقرير خبرين أو أكثر يسمى تقريراً مركباً .

مثال (١-١-١)

حدد قيم صواب التقارير التالية:

أ) تتم عمليات التمثيل الضوئي في النباتات في الليل.

ب) كوكب الزهرة أقرب الكواكب إلى الأرض.



ج) الجو اليوم غائم.

د) مجموع طول أي ضلعين في المثلث أقل من طول الضلع الثالث.

هـــ) العدد الصحيح هو عدد حقيقي.

الحل:

أ) تقرير صائب لأنه حقيقة علمية .

ب) تقرير صائب لأنه حقيقة علمية .

ج) لا نستطيع الحكم عليه لأنه يعتمد على حالة الجو عند قراءة هذا التقرير.

د) تقرير خاطئ لأنه يناقض حقيقة هندسية معروفة .

هـــ) تقرير صائب لأنه حقيقة رياضية معروفة .

١-٢:أدوات الربط (Connectives)

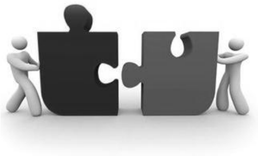
هناك العديد من الطرق لربط التقارير لتكوين تقارير مركبة ومنها:

أولاً: رابطة النفي (Negation of Statement) يرمز لأداة النفي بالرمز $(\sim)$

فإذا كان p تقريراً فإنه يقرأ (ليس صحيحاً أن p) أو (نفي p) فإذا كان التقرير p صائباً فإن $(\sim p)$ تقريراً خاطئاً.

ثانياً: رابطة "و" (العطف) (Conjunction) يرمز لأداة العطف بالرمز $(\wedge)$

فإذا كان p,q تقريرين فإن التقرير $(p \wedge q)$ يقرأ $(p$ و $q)$ وتستخدم للربط بين تقريرين أو أكثر لتكوين عبارة جديدة مركبه تعطي معناً جديداً .



ثالثاً: "أو " (الفصل) (Disjunction) يرمز لأداة العطف بالرمز $(\vee)$

فإذا كان p,q تقريرين فإن التقرير $(p \vee q)$ يقرأ $(p$ أو $q)$ ،ويستخدم للربط بين تقريرين أو أكثر لتكوين عبارة جديدة مركبة تعطي معناً جديداً .

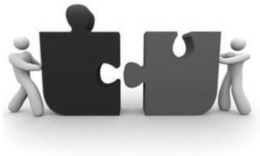
رابعاً: " إذا ..فإن " (الشرط) (Conditional) ويرمز لها بالرمز $(\rightarrow)$

فإذا كان p,q تقريرين فإن التقرير $(p \rightarrow q)$ يسمى تقريراً شرطياً ويقرأ(إذا كان p فإن q) أو(p يؤدي إلى q) أو(p شرط كافي لـــ q)أو(q شرط اللازم لـــ p)حيث تسمى p المقدمة و qالنتيجة وتستخدم للربط بين تقريرين أو أكثر لتكوين عبارة جديدة مركبة تعطي معناً جديداً.

خامساً:رابطة ".. إذا وفقط إذا .."(ثنائية الشرط) (Biconditional) ويرمز لها بالرمز $(\leftrightarrow)$

فإذا كان p,q تقريرين فإن التقرير $(p \leftrightarrow q)$ يسمى ثنائي الشرط ويقرأ(p إذا وفقط إذا كان q) أو(p الشرط الكافي و اللازم لتحقيق q)والجدير بالذكر أن $(p \leftrightarrow q)$ يمكن التعبير عنه بالشكل: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

والجدول التالي يوضح جداول الصواب لأدوات الربط السابقة، حيث T ترمز للصواب و F ترمز للخطأ.



p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

مثال (١-٢-١) :

حدد قيم صواب التقارير التالية :

أ) $p \vee \sim p$

ب) $(p \wedge q) \vee r$

الحل:

نلاحظ أن لدينا تقرير واحد فقط p لذا سيكون لدينا قيمتي صواب T و F .

أ) التقرير $p \sim$ عبارة ناتجة عن وضع رابطة النفي للتقرير p ومن ثم سيكون جدول الصواب كالآتي:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

ب) نلاحظ وجود ثلاثة تقارير مختلفة لذا سنحتاج إلى تكرار قيم صواب p و q وَ r كما سيظهر في الجدول التالي لنستكمل جميع الاحتمالات الممكنة للتقارير الثلاثة:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

ما عدد الصفوف في جدول صواب التقرير $p \sim \wedge (p \vee q)$ ؟

هل عدد الصفوف في جدول الصواب لأي تقرير مركب هو 2^n حيث n عدد التقارير البسيطة المختلفة المكونة للتقرير المركب ولماذا ؟

ملاحظة (١-٢-١)

(١) العبارة $(p \wedge q)$ تكون صائبة فقط عندما يكون كل مركباها صائبة وتكون خاطئة فيما عدا ذلك

(٢) العبارة $(p \vee q)$ تصدق إذا صدقت واحدة على الأقل من مركباها وتكذب فيما عدا ذلك .

(٣) العبارة $(p \rightarrow q)$ تكذب في حالة واحدة فقط وهي عندما تصدق وهي عندما تصدق المقدمة p وتكذب النتيجة q .

(٤) العبارة $(p \leftrightarrow q)$ تصدق إذا كانت المركبتين صادقتين معاً أو كاذبتين معاً.

ملاحظة (١-٢-٢)

إذا حوت العبارة على أكثر من رابطة نضع الأقواس حول التقرير بحيث تكون الأولوية لأداة النفي أكثر من باقي أدوات الروابط الأخرى ثم أداة العطف والفصل أكثر من أداتي الشرط وهذا يعتمد على مفهوم العبارة .

مثال (١-٢-٢) :

عبر عما يلي بصورة رمزية :

أ) التخصص الرئيسي لمحمد هو الرياضيات وليس الحاسب الآلي.

ب) يلعب سعيد كرة القدم أو السلة وليس كلاهما.

ج) الشرط الكافي لكي يكون للدالة F قيمة عظمى على الفترة $[a,b]$ هو أن تكون متصلة على (a,b) ومتصلة أيضاً عند a,b.

الحل:

أ) التخصص الرئيسي لمحمد هو الرياضيات وليس الحاسب الآلي .

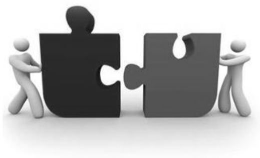
التقارير البسيطة ورموزها:

p : التخصص الرئيسي لمحمد هو الرياضيات.

q : التخصص الرئيسي لمحمد هو الحاسب الآلي.

أدوات الربط $(\wedge),(\sim)$

الصورة الرمزية : $p \wedge \sim q$



نحدد الأقواس كما في الملاحظة (١-٢-٢) : $\left(p \wedge \left(\sim q\right)\right)$

ب) يلعب سعيد كرة القدم أو السلة ولكن ليس كلاها.

التقارير البسيطة ورموزها :

p : يلعب سعيد كرة القدم

q : يلعب سعيد كرة السلة

أدوات الربط $(\vee),(\wedge),(\sim)$

الصورة الرمزية : $p \vee q \wedge \sim \left(p \wedge q\right)$

من الملاحظة(١-٢-٢) تصبح الصورة الرمزية على الصورة

: $\left(\left(p \vee q\right) \wedge \left(\sim \left(p \wedge q\right)\right)\right)$

ج) الشرط الكافي لكي يكون للدالة Fقيمة عظمى على الفترة$[a,b]$هو أن تكون متصلة على (a,b)ومتصلة أيضاً عند a,b.

التقارير البسيطة ورموزها :

p : للدالة F قيمة عظمى على الفترة$[a,b]$

q : الدالة F متصلة على الفترة(a,b)

r: الدالة F متصلة عند a

s: الدالة F متصلة عند b

الصورة الرمزية:$\left(\left(q \wedge r \wedge s\right) \rightarrow p\right)$

تعريف(١-٢-١):

يقال عن تقرير مركب أنه صائب منطقياً إذا كانت جميع قيم صوابه صادقة ويقال أنه خاطئ منطقياً إذا كانت جميع قيم صوابه خاطئة ، ويقال أنه مخلوط إذا كان غير صائب منطقياً وغير خاطئ منطقياً .

مثال (١-٢-٣) :

حدد قيمة صواب التقرير المركب :

القمر أصغر من الأرض وَ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

الحل :

١- نحدد قيم صواب تقاريره البسيطة

p : القمر أصغر من الأرض تقرير صائب لأنه حقيقة فلكية معروفة

q : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ تقرير صائب لأنه حقيقة رياضية

٢- نحدد أداة الربط المستخدمة أداة الربط هي $(\wedge)$

التقرير المركب	$(a \wedge b)$
قيم الصواب	$T \quad T$
	$\diagdown \quad \diagup$
أداة الربط	$\wedge$
	$\downarrow$
قيمة الصواب حسب أداة	T

$\therefore$ التقرير (القمر أصغر من الأرض وَ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ صائب.

تحقق من أن قيمة صواب التقرير المركب التالي خاطئة :

(يتجمد الماء عند درجة الصفر ويغلي عند درجة 100° إذا وفقط إذا كان $4=1+3$ فإن الرياض عاصمة مصر).

اختبر فهمك للموضوع بحل التدريب (١) من الملحق (صفحة ٦٧)

١-٣: العبارات المتكافئة (Equivalent propositions)

تعريف (١-٣-١)

إذا كان P,Q تقريرين وإذا كان التقرير الشرطي $P \rightarrow Q$ صائب منطقياً أو قانوناً فنقول أن التقرير P يقتضي التقرير Q ونرمز $(\Rightarrow)$ ويسمى الشرط في هذه الحالة اقتضاء (tautology) وفي بعض الأحيان نطلق على P المقدمة و Q النتيجة .

مثال (١-٣- ١) :

حدد ما إذا كانت التقارير التالية تمثل اقتضاء ، وهل الاتجاه العكسي يمثل اقتضاء.

أ) $p \Rightarrow p$

ب) $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$

ج) $p \Rightarrow p \wedge p$

د) $p \wedge q \Rightarrow q$

ه) $p \rightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$

و) $(p \rightarrow q) \Rightarrow \sim p \vee q$

الحل :

باستخدام جداول الصواب نجد أن (أ ، ب ، ج ، و) تمثل اقتضاء من الجهتين فهي تكافؤ.

في حين أن التقرير (د) يمثل اقتضاء أما الاتجاه المعاكس لا يمثل اقتضاء، أما التقرير (هـــ) فلا يمثل اقتضاء من الجهتين.

نظرية (١-٣-١)

إذا كان p,q تقريرين فإن:

(١) قانون الإضافة (low of addition)

$$p \Rightarrow p \vee q$$

(٢) قانون التبسيط (low of simplification)

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$p \wedge q \Rightarrow q$$

(٣) قانون الفصل (Disjunctive syllogism)

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$

لاحظ أن التبسيط يكون مع الرابطة $\wedge$ والإضافة تكون مع الرابطة $\vee$.

البرهان :

سوف نقوم بإثبات (٣) والباقي سيكون بالمثل .

(٣) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

p	$\vee$	q	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	q
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F
	(1)		(3)	(2)	(4)	

الخطوة (4) تعطي T دائماً $\therefore$ $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ هو اقتضاء.

تعريف(١-٣-٢):

يقال عن P, Q (بسيطة مركبة) أنهما متكافئتان منطقياً (Equiovalence) إذا كان لكل منهما نفس قيم أو جدول الصواب ويرمز لذلك بالرمز $P \equiv Q$ (ويقرأ P يكافئ Q) .

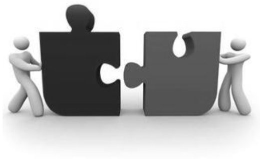
تعريف (١-٣-٣):

يعرف الشرط $p \rightarrow q$ بما يكافئه من العبارات التالية :

أ) $p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$

ب) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

من التعريف السابق نجد أن : $p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$، ويمكن إثبات ذلك باستخدام جداول الصواب .



نظرية(١-٣-٢)

إذا كان p,q تقريرين فإن :

(١) قانون النفي الثنائي (مضاعفة النفي) (low of double negation)

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

(٢) قانون الإبدال (commutative laws)

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

(٣) قانون عدم النمو (idempotent laws)

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

(٤) قانون المقابلة (المكافئ العكسي) (contra low)

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$$

برهان النظرية يتم من خلال جداول الصواب وهناك طريقة أخرى لإثبات (٤) بدون استخدام جداول الصواب) وذلك باستخدام تعاريف مناسبة وقوانين منطقية معلومة مسبقاً وتسمى هذه الطريقة **طريقة الاستنتاج** كما يتضح مما يلي.

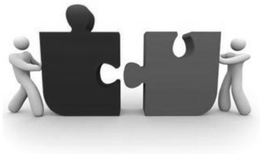
$p \to q \equiv \sim p \vee q$ (من تعريف(١-٣-٣))

$\equiv q \vee \sim p$ (من قوانين الإبدال)

$\equiv \sim(\sim q) \vee \sim p$ (قانون مضاعفة النفي)

$\equiv \sim q \to \sim p$ (من تعريف(١-٣-٣))

هل $p \to q \equiv p \to q$ ؟



مثال(١-٣-٢)

ليكن p,q تقريرين اثبت أن

أ) $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$

ب) $p \to q \equiv \sim p \vee q$

الحل :

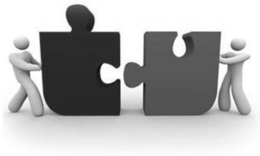
من خلال جداول الصواب يمكننا إثبات التكافؤ كما يلي:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$	$p \vee q$	$\sim p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T
					(1)	(2)	(3)	(4)

١- نلاحظ أن كل قيمة صدق في العمود (1) تناظرها نفس القيمة في العمود (2).

٢- نلاحظ أن كل قيمة صدق في العمود (3) تناظرها نفس القيمة في العمود (4).

مما سبق ولأهمية الشرط $p \to q$ فإننا نضع التعريف التالي:



نظرية (١-٣-٣) قوانين ديمورجان (Demorgan law's)

إذا كان p,q تقريرين فإن:

١) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

٢) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

توضح النظرية السابقة عملية توزيع أداة الربط $(\sim)$ على كل من أداة الربط $(\vee,\wedge)$ والبرهان يتم بواسطة جداول الصواب .

مثال (١-٣-٣)

اثبت أن العبارتين (أ)، (ب) متكافئتين بطريقة الاستنتاج (بدون استخدام جداول الصواب).

(أ) إذا رتبت العناصر تصاعدياً حسب أعدادها الذرية فإن خواصها الفيزيائية و الكيميائية تتكرر دورياً .

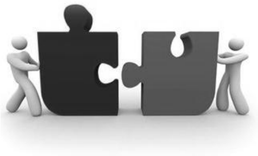
(ب) لم ترتب العناصر تصاعدياً حسب أعدادها الذرية أو ان خواصها الفيزيائية والكيميائية تتكرر دورياً .

الحل :

(أ) $\left[p \to (q \wedge r)\right]$

(ب) $\left[\sim p \vee (q \wedge r)\right]$

نبدأ بالعلاقة (أ) كالآتي :



$$p \to (q \wedge r) \equiv \sim (p \wedge \sim (q \wedge r))$$ من تعريف الشرط

$$\equiv \sim (p \wedge (\sim q \vee \sim r))$$ من دي مورجان

$$\equiv \sim p \vee \sim (\sim q \vee \sim r)$$ من دي مورجان

$$\equiv \sim p \vee (q \wedge r)$$

حصلنا على العلاقة (ب) ∴ العبارتين (أ) ، (ب) متكافئتين.

نظرية(١-٣-٤)

إذا كانت p,q تقارير فإن :

(١) قوانين التجميع (الدمج) (associative laws)

(أ) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

(ب) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

(٢) قوانين التوزيع (distributive laws)

(أ) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(ب) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(٣) قانون التعدي (transitive law)

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$$

مع مراعاة وضع الأقواس كما هو موضح في القانون.

وبرهان النظرية السابقة يتم من خلال جداول الصواب .

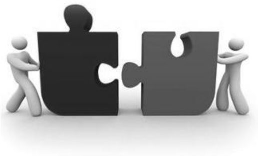
نظرية(١-٣-٥)

إذا كان p,q,r تقارير فإن:

(١)
$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee s)$$
$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \wedge r \to q \wedge s)$$

(٢) $p \vee r \to q \equiv (p \to q) \wedge (r \to q)$

ويتم برهان النظرية السابقة باستخدام جداول الصواب.



نظرية(١-٣-٦)

إذا كان p,q,r تقارير فإن :

(١) قانون الوضع (modus ponens)

$$\left[(p\to q)\wedge p\right]\Rightarrow q$$

(٢) قانون عكس النقيض (modus tollen).

$$\left[(p\to q)\wedge \sim q\right]\Rightarrow \sim p$$

(٣) قانون الانطلاق والوصول.

$$\left[(p\to q)\to r\right]\equiv (p\wedge q)\to r$$

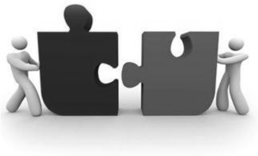
(٤) $\left[(p\to q)\wedge(\sim p\to q)\right]\Rightarrow q$

والبرهان يتم باستخدام جداول الصواب .

اثبت (٣)وَ(٤)باستخدام طريقة الاستنتاج.

نفي التقارير :

يمكننا تشبيه أداة النفي (~) بكرة القدم التي رميت على منزلك فتكسر نافذته الخارجية، فتغير من شكلها ثم تغير وتحطم ما تواجهه من أدوات أخرى. فكذلك هي أداة النفي تحطم القوس الخارجي للعبارة وتغير شكل أول أداة ربط تواجهها وتستمر في ذلك حتى أخر رابطة مع تغييرها للمفهوم العام التي تحمله العبارة.



مثال (١–٣–٤)

انف التقارير التالية:

أ) $(p \leftrightarrow q)$

ب) $\left[(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim q)\right]$

الحل:

أ) $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim\left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\right]$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

تم وضع القوس [ ] وذلك لأن العبارة الواحدة $p \leftrightarrow q$ أنتجت عبارتين هما $p \rightarrow q$ وَ $q \rightarrow p$ لذا لزم وضع مثل هذا القوس حتى لا يحدث تغيير في التقرير عند نفيه.

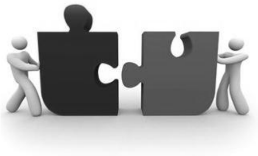
ب) $\sim\left[(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim q)\right] \equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim(r \wedge \sim q)$

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee q)$

عند إدخال النفي تم التخلص من الأقواس المربعة باستخدام قوانين دي مورجان.

تم تطبيق قاعدة النفي مباشرة وهي مقدمة الشرط ثم عبارة $\wedge$ ثم نفي نتيجة الشرط

اثبت أن: $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$



١-٤ التناقض (Contradiction)

التناقض هو عكس القانون فهناك تقارير تكون قيم الصدق لها كاذبة أو خاطئة لكل الاحتمالات المنطقية ومن أمثلة ذلك التقرير $p \wedge \sim q$ وإذا رمزنا للتناقض بالرمز c وللقانون بالرمز t فالنظرية التالية توضح أثر كل من c وَ t على أي تقرير p .

نظرية (١-٤-١)

ليكن t قانون وَ c تناقض وَ p تقرير اختياري فإن :

(١) قانون العنصر المحايد $p \wedge t \equiv p$

الشمول $p \vee t \equiv t$

(٢) قانون العنصر المحايد $p \vee c \equiv p$

الشمول $p \wedge c \equiv c$

حيث t جميع احتمالاتها المنطقية صائبة وَ c جميع احتمالاتها المنطقية خاطئة

يمكن إثبات النظرية السابقة باستخدام جداول الصواب.

يمكننا تلخيص قوانين المنطق السابقة كما يلي:

جبر القضايا (Algebra of proposition)

إذا كان p, q, r تقارير إختيارية و t تقرير صائب منطقياً (صادق) ، c تقرير خاطئ منطقياً (كاذب) فإن:

(١) قاعدتا الإبدال (commutative rules)

(أ) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (ب) $p \vee q \equiv q \vee p$

(٢) قاعدتا التجميع (associative rules)

(أ) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

(ب) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(٣)قاعدتا التوزيع (distributive rules)

(أ) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(ب) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(٤)قاعدتا العنصر المحايد (identity rules)

(أ) $p \wedge t \equiv p$ (ب) $p \vee c \equiv p$

(٥)قاعدتا النفي (negation rules)

(أ) $p \vee \sim p \equiv t$ (ب) $p \wedge \sim p \equiv c$

(٦) قاعدة مضاعفة النفي(double negation rules)

$\sim (\sim p) \equiv p$

(٧) قاعدتا الجمود (idempotent rules)

(أ) $p \vee p \equiv p$ (ب) $p \wedge p \equiv p$

(٨) قاعدتا ديمورجان(Demorgan's rules)

(أ) $\sim (p \wedge p) \equiv \sim p \vee \sim q$

(ب) $\sim (p \vee p) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(٩) قاعدتا الشمول (universal rules)

(أ) $p \vee t \equiv t$ (ب) $p \wedge c \equiv c$

(١٠)قاعدتا الامتصاص(absorption rules)

(أ) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ب)

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(١١)قاعدة البرهان البديل(alternative proof rule)

$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

(١٢) قاعدتا الشرط (conditional rules)

(أ) $p \to q \equiv \sim p \vee q$

(ب) $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

(١٣) قواعد ثنائي الشرط(biconditional rules)

(أ)$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

(ب) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(ج) $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

(١٤) قاعدة المكافئ العكسي(rule of contrapositive)

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

(١٥) قاعدة الانطلاق والوصول(exportation-importation
(rules

$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

فيما يلي أمثلة تُثبت فهم قواعد المنطق في ذاكرتك.

إذا كان p, q, r, sتقارير اختيارية فإن جميع العبارات التالية صادقة منطقياً أو تحصيل حاصل :

	مثال:
(١) $p \to q$	إذا ذاكرت سوف تنجح
p	ذاكرت
q	سوف تنجح

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الوضع وتكتب كالتالي:

$$((p \to q) \wedge p \Rightarrow q$$

وتعني أن أي شرط معلق لا يتحقق إلا إذا وقعت فعلاً مقدمته وإذا وقعت المقدمة فإن النتيجة ستقع حتماً

(٢)

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

مثال

إذا وجد الماء بطل التيمم

التيمم صحيح

إذا لم يوجد الماء

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة عكس النقيض وتكتب كالتالي:

$$((p \to q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$$

(٣)

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$$

مثال:

إما تشتري سيارة سوداء أو بيضاء

وبيعت السيارة السوداء

لم يتبقى إلا أن تشتري سيارة بيضاء

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الفصل وتكتب كالتالي:

$$((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$$

(٤)

$$\frac{p \wedge q}{q} \qquad \frac{p \wedge q}{p}$$

مثال

اشتريت سيارة أو أكلت تفاحة

إذا قلت أشتريت سيارة يظل المعنى صحيحاً

أو أكلت تفاحة يظل المعنى صحيحاً

ولا يؤثر على صحة العبارة

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة التبسيط وتكتب كالتالي:

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow q$$

(٥)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الإضافة وتكتب كالتالي:

$$p \Rightarrow p \vee q$$

مثال

(٦) $p \to q$ إذا قرأت القرآن سيكتب لك أجرا

$p \to r$ إذا قرأت القرآن سيشفع لك

$p \to q \wedge r$ إذن إذا قرأت القران سيكتب لك أجر ويشفع لك

ويسمى هذا القانون(adjunction) واختصاره Adj ويكتب كالتالي:

$$(p \to q) \wedge (p \to r) \Rightarrow (p \to q \wedge r)$$

مثال:

(٧) $p \to q$ إذا كذبت فقد عصيت الله

$q \to r$ إذا عصيت الله فقد أغضبته

$p \to r$ إذا كذبت أغضبت الله

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة التعدي وتكتب كالتالي:

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$$

---

(٨)

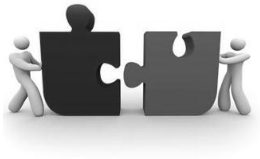
$$\frac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{p \wedge q}$$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الربط واختصاره conj وتكتب كالتالي:

$$p \wedge q \Rightarrow (p \wedge q)$$

مثال

(٩) (إذا أطعت والديك فقد أطعت الله) وَ (إذا ذاكرت تنجح)



$$(p \to q) \wedge (r \to s)$$

$$\frac{p \vee r}{q \vee s}$$

إذا أطعت والديك أو ذاكرت

إذن إما أطعت الله أو تنجح

ويسمى هذا القانون بـــ(constructive dilemma) واختصاره C.D

وتكتب كالتالي:

$$\left[(p \to q) \wedge (r \to s)\right] \wedge (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$$

---

(١٠)

مثال

$$(p \to q) \wedge (r \to s)$$

$$\frac{\sim q \vee \sim s}{\sim p \vee \sim r}$$

(إذا أجبت على السؤال تكسب) وَ(

إذا غابت الشمس يأتي الظلام)

لم تكسب أو لم ياتي الظلام

إذن لم تجب على السؤال أو لم تغيب الشمس

ويسمى هذا القانون بـــ(Destructive dilemma) واختصاره D.D

ويكتب كالتالي:

$$\left[(p \to q) \wedge (r \to s)\right] \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$$

---

(١١)

مثال

$$p \to q$$

$$\frac{\sim p \to q}{q}$$

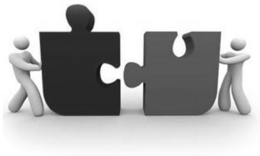
إذا كان الوقت نهاراً فإن في السماء غيوم

إذا لم يكن الوقت نهاراً فإن في السماء غيوم

إذن في السماء غيوم

تكتب هذه القاعدة كالتالي:

$$\left[(p \to q) \wedge (\sim p \to q)\right] \Rightarrow q$$



إرشادات مفيده لحل التمارين

خطوات الحل :

١) يلاحظ أنه يمكن حل **مسائل تكافئ العبارات** بثلاث طرق:

(أ) الطريقة الأولى:	**(وهي تعتمد على التعريف الأساسي للتكافؤ)**

١- إذا كانت العبارتان من النوع الذي يحمل قيمة الصواب T دائماً أو F دائماً ، بمعنى صائبة منطقياً أو خاطئة منطقياً) فإننا نوجد قيم صواب كلتا العبارتين فإن كانت لهما نفس قيم الصواب فإنهما متكافئتان وإن لم تكن كذلك فهما غير متكافئتين.

٢- إذا كانت العبارتان من النوع المخلوط نوجد جدول الصواب لكلتا العبارتين فإن كان لهما نفس ترتيب قيم الصواب في العمود الأخير من الجدول (الذي يضم قيم صواب العبارة بأكملها) فإنهما متكافئتان وعدم تحقق ذلك يعني أنهما غير متكافئتين ويجب ان تتم المقارنة داخل جدول واحد يضم العبارتين المطلوب إثبات تكافؤهما

(ب) الطريقة الثانية:	**(وهي تعتمد على قواعد الاستنتاج)**

١- عبرعن العبارتين اللغويتين بالصورة الرمزية ابدأ بالعبارة التي تحتوي على تقارير بسيطة وأدوات ربط أكثر ولا سيما إذا امتلكت إحداهما على الرابطة ($\rightarrow$) أو ($\leftrightarrow$) أكثر من الأخرى

٢- وجه اهتمامك إلى قواعد الإستنتاج واستحضر منها ما يلائم الروابط الموجودة في العبارة التي بدأت بها.

٣-اكتبي على الجانب الأيمن اسم القاعدة التي استخدمتها في كل خطوة

(ج) الطريقة الثالثة:	**(وهي تعتمد على مبدأ التعويض والقياس)**

وتستخدم عند وجود تقارير متكررة في كلتا العبارتين.

١- تكتب العبارات اللغوية بالصورة الرمزية.

٢- نبحث عن التقارير المركبة المتكررة فيهما ونستبدلها بتقارير بسيطة.

٣- فإذا حصلت على عبارة عرف أنها تمثل تكافؤ استبدلي فيها العبارات البسيطة التي وضعتها في الفقرة-٢- بالعبارات المركبة الخاصة بالعبارتين الموجودتين لدينا فـــي كل موضع تجدين فـــيه العبارة البسيطة أما عملية استبدال تقارير مركبة من قواعد الاستنتاج بتقارير بسيطة غير مسموح به لأنه يخل بهذه القاعدة .

٢) إذا كانت العبارتان تحتويان على الأقل على أربع تقارير بسيطة فإنه يتعذر علينا إيجاد جدول الصواب لهما لأنه يجب علينا تكوين جدول كبير به 2^n حالة لذلك سنستخدم الطريقة الثانية أو الثالثة بدلاً من $n \geq 4$, الطريقة الأولى ولا سيما فـــي حالة التقارير اللغوية المخلوطة أو الرمزية.

٣) عند استخدام الطريقة الثالثة إذا لم يتم التوصل إلى قاعدة من قواعد الاستنتاج المعروفة فإن هذه الطريقة تفشل ونستخدم الطريقة الأولى أو الثانية فـــي إثبات التكافؤ أو عدمه.

نفي التقارير:

خطوات نفي التقارير:

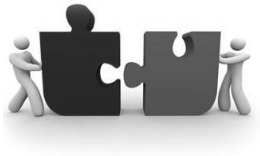
١- عبر عن التقرير المركب بالصورة الرمزية.

٢- استذكر القواعد التالية:

قاعدة نفي الرابطة ($\wedge$) هي: $(i)\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

قاعدة نفي الرابطة ($\vee$) هي: $(ii)\ \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

قاعدة نفي الرابطة ($\sim$) هي: $(iii)\ \sim(\sim p) \equiv p$



قاعدة نفي الرابطة($\rightarrow$) هي: $(iv)\ \sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

قاعدة نفي الرابطة ($\leftrightarrow$) هي: $(v)\ \sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$

$\equiv p \leftrightarrow \sim q$

٣- حدّد الأقواس الداخلية والخارجية بدقة وعناية .

٤- وجه انتباهك إلى أداة الربط الخارجية والتي تأخذ أحد الأشكال التالية :

(تقرير بسيط أو مركب) $\wedge$ (تقرير بسيط أو مركب)

(تقرير بسيط أو مركب) $\vee$ (تقرير بسيط أو مركب)

(تقرير بسيط أو مركب) $\rightarrow$(تقرير بسيط أو مركب)

(تقرير بسيط أو مركب) $\leftrightarrow$ (تقرير بسيط أو مركب)

٥- طبق قاعدة النفي للرابطة الخارجية التي حصلت عليها ولتكن مثلاً :

(تقرير بسيط أو مركب) $\wedge$(تقرير بسيط أو مركب)

وحسب قاعدة نفي الرابطة ($\wedge$) نحصل على :

$\sim$ (تقرير بسيط أو مركب) $\vee$(تقرير بسيط أو مركب)$\sim$

٦- تدرج في هذه العملية (من القوس الخارجي إلى الداخلي) حتى تصل إلى آخر الأقواس الداخلية في العبارة .

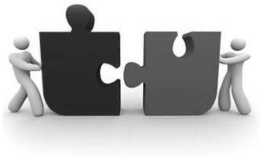
٧- اكتب الترجمة الكلامية لها إن وجدت.

تمارين

١) عين العبارات البسيطة والمركبة في كل مما يلي:

i. خالق الناس بخلق حسن.

ii. الماء هو المادة الوحيدة التي تقل كثافتها عندما تتجمد.



iii. العمود النازل من مركز الدائرة على وتر فيها ينصفه.

iv. 8 عدد تام و 11 عدد غير أولي.

v. $2^2 + 11^2 = 5^3$.

vi. الخمر أم الخبائث.

٢) عين التقارير بين الجمل التالية:

i. السماء تمطر.

ii. ماذا حفظت من سور القران الكريم.

iii. لا توجد حياة على سطح المريخ.

iv. ما أجمل التحلي بالأخلاق الفاضلة.

v. $x^2 + 3x = 0$ حيث x عدد حقيقي.

vi. $2+1=5$

٣) في التمرين(١)إذا كان التعبير المذكور تقريراً فحدد قيم صوابه.

٤) إذا كان A ترمز للتقرير " نزل المطر " و B ترمز للتقرير " اخضرت الأرض "

فاكتب الترجمة الكلامية لكل مما يلي:

i. $A \wedge B$

ii. $A \vee B$

iii. $\sim A \wedge B$

iv. $A \rightarrow B$

v. $A \leftrightarrow B$

vi. $\sim A \rightarrow B$

vii. $\sim A \leftrightarrow \sim B$

٥) استنتج جداول الصواب للتقارير التالية :

i. $(p \vee q) \to (q \wedge \sim r)$

ii. $(r \wedge s) \vee \sim r$

iii. $(A \wedge B) \to A$

٦) حدد قيمة صواب كل من العبارات التالية :

i. كل مولود يولد على الفطرة فأبواه يهودانه أو يمجسانه أو ينصرانه .

ii. يزيد الثقل كلما اقتربنا من مركز الأرض.

iii. يقبل العدد 28 القسمة على 7 وعلى 5 .

iv. يكون الشكل رباعي إذا وفقط إذا لم تؤثر عليه قوة خارجية .

v. $x \neq y \leftrightarrow x^2 \neq y^2$.

vi. إذا كان a,b عددين حقيقين فإن $|a| = b \leftrightarrow a \geq b$ أو $a \leq b$

vii. $|x+y| \leq |x|+|y|$ وَ $x^2+y^2=(x+y)^2$

viii. $x^2+y^2+ax+by+c=0$ تمثل دائرة إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2-4c>0$

ix. إذا كان $b^2=4ac$ فإن للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذران حقيقيان مختلفان.

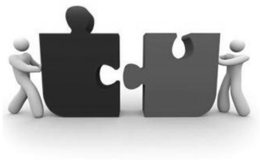
٧) تحقق من أن قيمة صواب التقرير المركب خاطئة(يتجمد الماء عند درجة الصفر ويغلي عند درجة 100° إذا وفقط إذا كان $3+1=4$ فإن الرياض عاصمة مصر)

٨) انف كلاً مما يلي :

i. للحرارة علاقة وثيقة بالمادة وتركيبها .

ii. مجموع زوايا المثلث أكبر من 180°

iii. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \leftrightarrow 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$



iv. في الامتحان يكرم المرء أو يهان .

v. إذا كان $x^2=9$ فإن $x=3$ أو $x=-3$.

vi. $(p\wedge \sim q)\vee r$

٩) هل العبارة التالية تمثل اقتضاء $p\vee q\to p$.

١٠) هل العبارتان ١ و ٢ متكافئتان عندما:

i. ١- $(p\vee q)\leftrightarrow r$ ٢- $(p\to q)\wedge(q\to r)$

ii. ١- $p\leftrightarrow(q\wedge r)$ ٢- $(p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)$

iii. ١- $(p\to q)\to r$ ٢- $(p\wedge \sim q)\vee r$

iv. ١- $|x|\le a$ ٢- $-a\le x\le a$

١١) اثبت أن :

i. $P\vee Q\equiv(P\vee Q)\wedge\sim(P\wedge Q)\equiv(P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q)$

ii. $(P\wedge Q)\to R\equiv(P\to R)\vee(Q\to R)$

iii. $(P\to Q)\to R\equiv(P\wedge\sim R)\to\sim Q$

iv. $P\to Q\equiv(P\wedge R)\to(Q\wedge R)$

v. $P\to(Q\to R)\equiv(P\wedge Q)\to R$

vi. $P\leftrightarrow Q\equiv\sim P\leftrightarrow\sim Q\equiv(P\wedge Q)\vee(\sim P\wedge\sim Q)$

١٢) أثبت قانون ديمورجان لثلاث عناصر

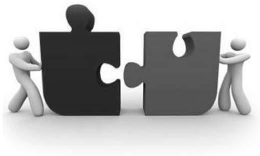
i. $\sim(p\wedge q\wedge r)\equiv\sim p\vee\sim q\vee\sim r$

ii. $\sim(p\vee q\vee r)\equiv\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r$

١٣)هل العبارتين متكافئتين

i. $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

ii. $p\wedge(q\vee p)\equiv p$



١-٥-أ التسوير❄

عند دراسة التقارير التي لا تحتوي متغيرات فإنه بسهوله يمكننا التحدث عن قيم صواب التقرير وذلك لأن التقرير إما صائب أو خاطئ. ولكن إذا اشتمل التقرير على متغيرات، فإن تحديد قيم صواب التقرير أصعب مما كان عليه في السابق. وذلك لأن الحكم على صوابه أو خطئه يعتمد على القيم التي يأخذها المتغير الموجود في التقرير فمثلاً:

إذا كانت $P(x)$ ترمز للعبارة (x هو عدد أولي) فإن $P(x)$ صائب إذا كان $x = 23$ وخاطئ إذا كان $x = 22$

ولنتجاوز هذه الصعوبة سنقوم بتعريف ما يسمى بمجموعة الصواب للتقارير المحتوية على متغيرات.

تعريف (١-٥-١)

مجموعة صواب التقرير $P(x)$ هي مجموعة قيم x التي تجعل التقرير $P(x)$ صائب ونكتب:

$$Truth\ set\ of\ \ P(x) = \{x \mid P(x)\}$$

مثال(١-٥-١):

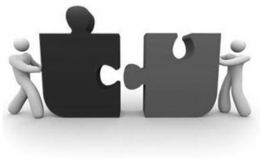
حدد قيم صواب التقارير التالية:

١. n هو عدد أولي زوجي.

٢. x هو لون من ألوان الطيف.

الحل:

❄ من كتاب: How to Prove It للمؤلف : Daniel. J Velleman بتصرف.



١- $\{2\}$ هي المجموعة المطلوبة.

٢- { النيلي، الأصفر، الأخضر، الأحمر، البرتقالي، البنفسجي، الأزرق }

أدوات التسوير

رأينا فيما سبق أن العبارة $P(x)$ المحتوية على المتغير x يمكن أن تكون صائبة لبعض قيم x وخاطئة لقيم أخرى لـ x.

وفي كثير من الأحيان نريد أن نعرف كم من قيم x التي تجعل $P(x)$ صائبة، وكحالة خاصة نريد أن نقول أن $P(x)$ صائبة لجميع قيم x. أو نقول أنه توجد قيمة لـ x تجعل $P(x)$ صائبة وهذا يدفعنا لتعريف أداتين جديدتين نطلق عليهما أداتا التسوير، لتساعدنا عن التعبير عن هذين الاصطلاحين.

تعريف (١-٥-٢)

"$\forall x \ P(x)$" تُقرأ لجميع قيم x العبارة $P(x)$ صائبة وتكتب أحياناً $\forall x\,(P(x))$ وتسمى أداة التسوير الشاملة.

"$\exists x \ P(x)$" تُقرأ يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ x تجعل العبارة $P(x)$ صائبة، وتكتب أحياناً $\exists x\,(P(x))$ وتسمى أداة التسوير الجزئية.

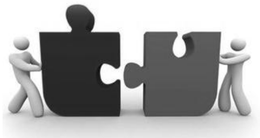
مثال (١-٥-٢)

ماذا تعني العبارات التالية حيث مجموعة النقاش هي $\mathbb{R}$ ثم حددي قيم صوابها.

أ) $\forall x\,(x^2 \geq 0)$

ب) $\exists x\,(x^2 - 2x + 3 = 0)$

الحل:



أ) العبارة تعني أن كل عدد حقيقي x مربعه موجب وهذا تقرير صائب لجميع الاعداد الحقيقية.

ب) العبارة تعني أنه يوجد عدد حقيقي يمثل حل للمعادلة $x^2 - 2x + 3 = 0$ ولكن هذه المعادلة ليس لها حل في الأعداد الحقيقية أي أنه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة.إذن التقرير خاطئ

مثال (١-٥-٣)

إذا كانت مجموعة النقاش هي مجموعة الأعداد الكلية فعبّر عن ما يلي بلغة سليمة ثم حدد قيم صواب هذه التعابير.

١) $\forall x \exists y \left(x < y \right)$

٢) $\exists y \forall x \left(x < y \right)$

٣) $\exists x \forall y \left(x < y \right)$

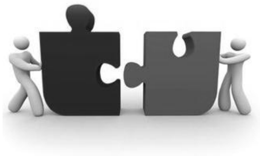
٤) $\exists x \exists y \left(x < y \right)$

الحل:

١) لكل عدد كلي x يوجد عدد y أكبر منه.وهذه العبارة صحيحة لأنه يمكننا اختيار $y = x + 1$ على سبيل المثال وواضح أن $x + 1$ أكبر من x.

٢) يوجد عدد كلي y تكون جميع الأعداد x الكلية أقل منه.وهذا تقرير خاطئ، إذ لا يوجد مثل هذا العدد.

٣) يوجد عدد كلي x تكون جميع الأعداد الكلية y أكبر منه .وهذا خطأ.ربما يخطر في ذهنك أن الصفر هو العدد المناسب ولكن $0 < y$ صحيح لجميع الأعداد إلا أن $y = 0$ لا يحقق هذه المتباينة إذن التقرير خاطئ.



٤) يوجد عدد كلي x بحيث أنه يوجد عدد كلي y يحقق أن $x < y$. وهذا صحيح إذن التقرير صائب.

١-٦-أ: نفي أدوات التسوير :

نلخص القاعدتين فيما يلي

$$\sim \exists x P(x) \equiv \forall x \sim P(x)$$
$$\sim \forall x P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$$

بهذه القواعد وبقوانين ديمورجان يمكننا إجراء النفي للعبارات بطريقة ميسرة كما يظهر من المثال التالي:

مثال (١-٦-١)

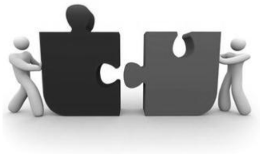
انف العبارات التالية ثم عبّر عن النفي بصورة مثبتة (لا تحتوي على أداة ~)

$$a) A \subseteq B$$
$$b) \forall a \exists b \left(R(a,b) \wedge \sim L(a,b) \right)$$

الحل:

$$\begin{aligned} a) \sim A \subseteq B &\equiv \sim \forall x \left(x \in A \to x \in B \right) \\ &\equiv \exists x \sim \left(x \in A \to x \in B \right) \\ &\equiv \exists x \sim \left(x \notin A \vee x \in B \right) \\ &\equiv \exists x \left(x \in A \wedge x \notin B \right) \end{aligned}$$

أي أن النفي هو يوجد عنصر في A ولا ينتمي إلى B.



$$b)\sim \forall a\exists b\left(R\left(a,b\right)\wedge \sim L\left(a,b\right)\right)$$
$$\equiv \exists a\sim \left(\exists b\left(R\left(a,b\right)\wedge \sim L\left(a,b\right)\right)\right)$$
$$\equiv \exists a\forall b\sim \left(R\left(a,b\right)\wedge \sim L\left(a,b\right)\right)$$
$$\equiv \exists a\forall b\left(R\left(a,b\right)\wedge \sim L\left(a,b\right)\right)$$
$$\equiv \exists a\forall b\left(\sim R\left(a,b\right)\vee L\left(a,b\right)\right)$$
$$\equiv \exists a\forall b\left(R\left(a,b\right)\rightarrow L\left(a,b\right)\right)$$

نفي التقارير المسورة

إذا كانت مجموعة النقاش هي المجموعة A فإننا نعبّر عن أدوات التسوير بالعبارة التالية $\forall x\in A\ P\left(x\right)$ وهذه العبارة يمكننا كتابتها بصورة مكافئة كما يلي:

$$\forall x\in AP\left(x\right)\equiv \forall x\left(x\in A\rightarrow P\left(x\right)\right)$$

ومن المثير ملاحظة أنه يمكننا تطبيق قواعد النفي السابقة على التقارير المسورة كما سيظهر لنا فيما يلي:

$$\sim \forall x\in AP\left(x\right)\equiv \sim \forall x\left(x\in A\rightarrow P\left(x\right)\right)$$

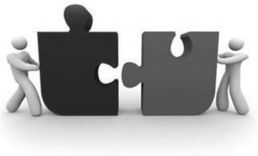
(نفي أداة التسوير) $\equiv \exists x\sim \left(x\in A\rightarrow P\left(x\right)\right)$

(تعريف الشرط) $\equiv \exists x\sim \left(x\notin A\vee P\left(x\right)\right)$

(قانون ديمورجان) $\equiv \exists x\left(x\in A\wedge \sim P\left(x\right)\right)$

$$\equiv \exists x\in A\sim P\left(x\right)$$

أي أن $\sim \forall x\in AP\left(x\right)\equiv \exists x\in A\sim P\left(x\right)$



وبالمثل يمكننا إثبات أن

$$\sim \exists x \in A P(x) \equiv \forall x \in A \sim P(x)$$

أيضاً يمكننا إثبات أن:

$$\forall x \in A P(x) \equiv \sim\sim \forall x \in A \ \ P(x) \quad \text{(قانون النفي الثنائي)}$$
$$\equiv \sim \exists x \in A \sim P(x) \quad \text{(نفي أداة التسوير)}$$

هل: $\exists x\left(p(x) \wedge q(x)\right) \equiv \exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$ ؟

إرشاد: أدرس العبارتين حيث $p(x)$ طالب يلبس نظارة، $q(x)$ طالب عربي. ثم ترجم العبارتين بلغة سليمة.

مثال(١–٦–٢):

استخدم الأدوات $\forall, \exists$ في التعبير عما يلي حيث x, y, z تشير إلى أعداد حقيقية.

أ) x هو مربع تام

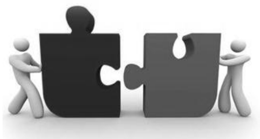
ب) x هو مضاعف للعدد y

ج) x هو عدد أولي

د) x هو أصغر عدد يمثل مضاعف لكل من z, y

الحل:

أ) x يساوي مربع عدد ما،بعبارة أخرى $\exists y\left(x = y^2\right)$



ب) x يساوي y مضروبة في نفسها عدد من المرات أو بعبارة أخرى $\exists z\,(x=yz)$

ج) من الواضح أن $x>1$ وكذلك x لا يمكن أن تكتب كحاصل ضرب عددين طبيعيين كل منهما أصغر من x، بعبارة أخرى:

$$x>1\wedge\sim\exists y\,\exists z\,(x=yz\wedge y<x\wedge z<y)$$

د) يمكننا أن نعبّر عنها على خطوات:

١. x هو مضاعف للعدد y كما أنه مضاعف للعدد z وأيضاً لا يوجد عدد أصغر يمثل مضاعف للعددين z,y

٢. $\exists a(x=ya)\wedge\exists b(x=zb)\wedge\sim\exists w\,(w<x\wedge w,y,z$ مضاعف لكل من)

٣. $\exists a(x=ya)\wedge\exists b(x=zb)\wedge\sim w\,(w<x\wedge\exists c(w=yc)\wedge\exists d(w=zd))$

مثال (١-٦-٣):

عبر عما يلي حيث المجموعة المقصودة هي $\mathbb{R}$.

أ) المحايد لعملية الجمع هو الصفر.

ب) كل عدد حقيقي له معكوس جمعي

ج) الأعداد السالبة ليس لها جذر تربيعي

د) كل عدد موجب حقيقي له بالضبط جذرين تربيعيين.

الحل:

$$a:\forall x\,(x+0=x)$$
$$b:\forall x\,\exists y\,(x+y=0)$$
$$c:\forall x\,\left(x<0\rightarrow\sim\exists y\,\left(y^2=x\right)\right)$$

سيتم التعبير عنها عبر الخطوات التالية : d

$1-\forall x\,(x>0\rightarrow$ x لها جذرين تربيعيين فقط $)$

$2-\forall x\,(x>0\rightarrow\exists y\,\exists z\,($

y,z جذريين للعدد x و $y\neq z$ و لا يوجد جذر آخر غيرهما $)$

$$3-\forall x\,\left(x>0\rightarrow\exists y\,\exists z\,\left(y^2=x\wedge z^2=x\wedge y\neq z\wedge\sim\exists w\left(w^2=x\right)\wedge w\neq z\wedge w\neq y\right)\right)$$

تمارين

١. انف العبارات التالية بحيث تختفي علامة النفي من العبارة الأخيرة

i. $\forall x\,(x\in A\rightarrow x\in B)$

ii. $\forall a\in A\,\exists b\in B\,(a\in C\leftrightarrow b\in C)$

iii. $\forall y>0\,\exists x\left(ax^2+bx+c=y\right)$

٢. حدد قيم صواب العبارات التالية حيث مجموعة النقاش هي الأعداد الكلية.

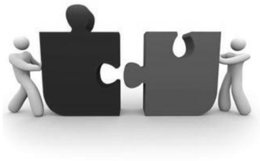
i. $\forall x\left(x<7\rightarrow\exists a\exists b\exists c\left(a^2+b^2+c^2=x\right)\right)$

ii. $\exists!x\left((x-4)^2=9\right)$ ($\exists!$: تعني يوجد عنصر واحد فقط)

iii. $\exists!x\left((x-4)^2=25\right)$

iv. $\exists x\,\exists y\left((x-4)^2=25\wedge(y-4)^2=25\right)$

٣. أثبت أن: $\sim\exists x\in A\,P(x)\equiv\forall x\in A\sim P(x)$



١-٧-أ: طرق البرهان ❄

يشبه البرهان الأسلوب الذي يتخذه الشخص ليركب puzzles ليس هناك أي قيود على الأسلوب الذي نتخذه لكن أهم قيد هو أن يتم تركيبها بصورة صحيحة.

سنقوم الآن بإعطاء بعض الطرق التي تمكن الطلاب من البدء في البرهان وتكون بمثابة قواعد إرشادية حتى يتمرسوا على جميع الطرق الممكنة ثم يختاروا ما يجدونه أفضل في كل حالة وسيتم تقسيم الطرق بحسب شكل المطلوب (الهدف) كما يلي:

أولاً : إذا كان المطلوب على شكل $p \to q$.

هناك طريقتين أساسيتين نناقشهما فيما يلي:

الطريقة الأولى: اعتبار p معطى و qمطلوب.

مثال (١-٧-١)

إذا كان a,bعددين حقيقيين فاثبت أن $0<a<b \to a^2<b^2$

الحل:

المعطى	**المطلوب**
a,bعددين حقيقيين	$0<a<b \to a^2<b^2$

لأن المطلوب على شكل $p \to q$ نعيد كتابة المعطى والمطلوب كالتالي:

❄يفضل الأنتقال لدراسة البنود ٢-١ ، ٢-٢ ، ٢-٣ قبل الشروع في دراسة طرق البر هان.

المعطى	المطلوب
a,b عددين	$a^2 < b^2$
$0 < a < b$	

مسودة الحل:

لدينا $a < b$

$\because a > 0$ بالضرب في a

$a^2 < ab$

كما أن $b > 0$ إذن $ab < b^2$

وهذا يعني أن $a^2 < ab < b^2$

أي أن $a^2 < b^2$ الآن يمكننا كتابة البرهان كالآتي:

البرهان:

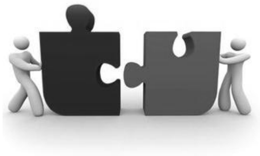
لنفرض $0 < a < b$ بضرب $a < b$ بالعدد الموجب a نحصل على $a^2 < ab$ وبضرب $a < b$ بالعدد الموجب b نحصل على $ab < b^2$ أي أننا حصلنا على $a^2 < ab < b^2$ أي أن $a^2 < b^2$ ومن ثم فإنه إذا كان $0 < a < b$ فإن $a^2 < b^2$.

الطريقة الثانية

استخدام المكافئ العكسي لتحويل شكل المطلوب $p \to q$ إلى $\sim q \to \sim p$.

فإذا كانت لدينا مسألة كالتالي:

المعطى	المطلوب



....	$p \to q$

إذن باستخدام الطريقة الثانية يصبح المعطى:

المعطى	المطلوب
....	$\sim p$
$\sim q$	

مثال(١–٧–٢):

لنفرض a,b,c أعداد حقيقية حيث $a > b$ اثبت أن:

$$ac \le bc \to c \le 0$$

الحل:

المعطى	المطلوب
a,b,c أعداد حقيقية	
$ac \le bc \to c \le 0$	
$a > b$	

باستخدام الطريقة الثانية يصبح المعطى:

المعطى	المطلوب
a,b,c أعداد حقيقية	$ac > bc$
$a > b$	
$c > 0$	

مسودة الحل:

لدينا $c > 0$

$a > b$

إذن $ac > bc$

أي أن $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

البرهان:

سنستخدم المكافئ العكسي نفرض أن $c > 0$ إذن يمكننا ضرب المتباينة $a > b$ بالعدد c فنحصل على $ac > bc$. ومن ثم فإن:

$$ac \le bc \Rightarrow c \le 0$$

تمارين

١) إذا كانت a,b أعداد حقيقية فاثبت أن:

$$0 < a < b \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

٢) إذا كان a عدد حقيقي فاثبت أن:

$$a^3 > a \rightarrow a^5 > a$$

٣) إذا كان x , y عددين حقيقيين وكان $3x + 2y \le 5$ فاثبت أن:

$$x > 1 \rightarrow y > 1$$

٤) إذا كان x , y عددين حقيقيين فاثبت أن

$$\left[x^2 + y = 3 \wedge 2x - y = 2\right] \Rightarrow x = -1$$

ثانياً : إذا كان المطلوب على شكل نفي $\sim p$.

قبل استخدام الطريقة الثالثة تكون المسألة كالتالي:

المعطى	المطلوب

....	$\sim p$

بعد استخدام الطريقة الثالثة تصبح

المعطى	**المطلوب**
....	تناقض
p	

مثال (١–٧–٣):

اثبت انه إذا كان $x^2+y=13$ و $y\neq 4$ فإن $x\neq 3$

الحل:

المعطى	**المطلوب**
$x^2+y=13$	$x\neq 3$
$y\neq 4$	

باستخدام الطريقة الثالثة

المعطى	**المطلوب**
$x^2+y=13$ $y\neq 4$ $x=3$	**تناقض**

مسودة الحل:

$$x = 3$$
$$x^2 + y = 13$$
$$\therefore 9 + y = 13$$
$$\therefore y = 13 - 9$$
$$\therefore y = 4$$

لكن $y \neq 4$ إذن حصلنا على تناقض.

البرهان

نفرض $x^2 + y = 13$ وَ $y \neq 4$ لنعتبر أن $x = 3$ فبالتعويض عن x في المعادلة $x^2 + y = 13$ نحصل على $y = 4$، ولكن هذا تناقض كون $y \neq 4$.

إذن لا يمكن أن تكون $x = 3$. أي أن:

$$\left[\left(x^2 + y = 13\right) \wedge y \neq 4\right] \rightarrow x \neq 3$$

مثال (١-٧-٤):

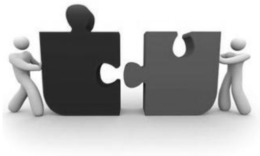
نفرض A, B, C مجموعات بحيث أن $A - B \subseteq C$ اثبت أن:

$$x \in A - C \rightarrow x \in B$$

الحل:

المعطى	المطلوب
A, B, C مجموعات	$x \in B$
$A - B \subseteq C$	
$x \in A - C$	

و باستخدام الطريقة الثالثة:



المعطى	المطلوب
مجموعات A,B,C	الوصول على تناقض
$A - B \subseteq C$	
$x \in A - C$	
$x \notin B$	

مسودة الحل:

$x \in A - C$

$\therefore x \in A \wedge x \notin C$

معطى $x \notin B$

$\therefore x \in A - B$

ولكن $A - B \subseteq C$

$\therefore x \in C$

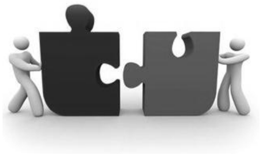
وهذا تناقض لأن $x \in C \wedge x \notin C$

مثال (**١–٧–٥**)

لنفرض $A \subseteq B$ وَ $a \in A$، $a \notin B - C$ أثبت أن $a \in C$

الحل:

المعطى	المطلوب
$A \subseteq B$	$a \in C$



$a \in A$

$a \notin B - C$

مسودة الحل (بدون استخدام الطريقة الثالثة)

$$\because a \in A$$
$$\because A \subseteq B$$
$$\therefore a \in B$$
$$\because a \notin B - C$$
$$\equiv \sim \left(a \in B \wedge a \notin C\right)$$
$$\equiv a \notin B \vee a \in C$$
$$\equiv a \in B \rightarrow a \in C$$

ولكن $a \in B$ إذن من قانون الوضع $a \in C$

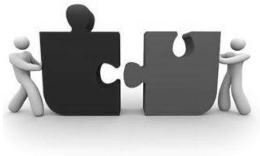
البرهان

نفرض أن $A \subseteq B$ وَ $a \in A$ إذن $a \in B$ وحيث أن $a \notin B - C$ وهذا يكافئ أن $a \in B \rightarrow a \in C$ إذن $a \in C$

تمارين

١. لنفرض $A \subseteq C$ ،C, B مجموعتين منفصلتين اثبت أن $x \in A \rightarrow x \notin B$

٢. لنفرض أن $A - B$ ،C مجموعتين منفصلتين اثبت أن $x \in C \rightarrow x \in B$



٣. لنفرض ان $y + x = 2y - x$ وَ x , y ليس كلاهما صفراً.اثبت ان $y \neq 0$

٤. لنفرض a,b عددين حقيقيين غير صفريين اثبت أن

$$a < \frac{1}{a} < b < \frac{1}{b} \rightarrow a < -1$$

٥. حدد الخطأ في البرهان التالي:

نظرية (غير صحيحة)

ليكن x , y عددين حقيقيين ولنعتبر $x + y = 10$ أثبت أن $x \neq 3$ و $y \neq 8$.

البرهان:

لنعتبر نفي المطلوب أي أن $x = 3$ و $y = 8$.ولكن بهذا الفرض نجد أن $x + y = 11$ وهذا يناقض أن $x + y = 10$ إذن النظرية صحيحة

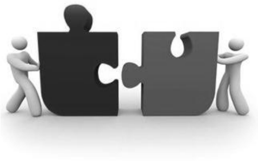
٦. حدد الخطأ في البرهان التالي:

نظرية(غير صحيحة)

ليكن $x \in A, B \subseteq C, A \subseteq C$ اثبت أن $x \in B$

البرهان

لنعتبر $x \notin B$ وحيث أن $x \in A$ و $A \subseteq C$ إذن $x \in C$. وحيث أن $x \notin B$ وَ $B \subseteq C$ إذن $x \notin C$،أي إننا وصلنا إلى $x \in C$ وَ $x \notin C$ إذن حصلنا على تناقض، أي أن النظرية صحيحة.



ثالثاً : إذا كان المطلوب على شكل $\forall x P(x)$ سنتناول هنا الطريقة(٤)

المعطى	المطلوب
....	$\forall x P(x)$

بعد إتباع الطريقة(٤)

المعطى	المطلوب
....	$P(x)$

وصياغة البرهان كالتالي:

لنأخذ x اختياري

ثم نتوصل من المعطى إلى $P(x)$

مثال(١-٧-٦):

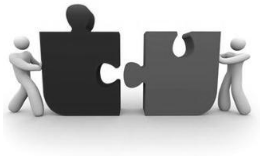
ليكن A,B,C مجموعات و $A-B \subseteq C$ اثبت أن $A-C \subseteq B$

الحل:

المعطى	المطلوب
A,B,C مجموعات $A-B \subseteq C$	$A-C \subseteq B$

أو بصورة مكافئة

المعطى	المطلوب
A,B,C مجموعات $A-B \subseteq C$	$\forall x\,(x \in A-C \rightarrow x \in B)$



باستخدام الطريقة الرابعة:

المعطى	المطلوب
A,B,C مجموعات	$x \in A - C \rightarrow x \in B$
$A - B \subseteq C$	

وباستخدام الطريقة الأولى يكون

المعطى	المطلوب
A,B,C مجموعات	$x \in B$
$A - B \subseteq C$	
$x \in A - C$	

وباستخدام الطريقة(٣)

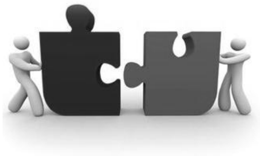
المعطى	المطلوب
A,B,C مجموعات	الوصول إلى تناقض
$A - C \subseteq B$	
$x \in A - C$	
$x \notin B$	

البرهان:

لنأخذ x اختياري. بفرض $x \in A - C$ نجد

أن $x \in A , x \notin C$ ولنعتبر $x \notin B$ إذن $x \in A - B$ ولكن $A - B \subseteq C$ إذن

$x \in C$ ولكن لدينا $x \notin C$ إذن وصلنا إلى تناقض. أي اننا أثبتنا



أن $x \in A - C \rightarrow x \in B$ وحيث أن x اختياري

إذن $\forall x \left(x \in A - C \rightarrow x \in B \right)$ $\therefore A - C \subseteq B$

مثال (١-٧-٦)

ليكن A,B مجموعتين اثبت أن :إذا كان $A \cap B = A$ فإن $A \subseteq B$

الحل:

بعد تطبيق الطريقة (١) ثم الطريقة(٤) يكون لدينا

المعطى	المطلوب
$A \cap B = A$ $x \in A$	$x \in B$

البرهان

لنأخذ x اختياري. بما أن $A = A \cap B, x \in A$ إذن $x \in A \cap B$ ومن ثم فإن $x \in B$.

وحيث أن x اختياري إذن $\forall x \left(x \in A \rightarrow x \in B \right)$.

رابعاً : إذا كان المطلوب على الصورة $\exists x P\left(x \right)$

سنتناول هنا الطريقة الخامسة

قبل الطريقة يكون لدينا.

المعطى	المطلوب
....	$\exists x P\left(x \right)$

بعد إتباع الطريقة(٥) يكون لدينا

المطلوب	المعطى
$P(x)$	....

ثم نصل إلى x (المراد إيجاده)

وصياغة البرهان كالتالي:

لنأخذ (الذي تم إيجاده من المناقشة)= x

ثم نبرهن إلى أن نصل إلى $P(x)$

إذن $\exists x P(x)$

مثال (١–٧–٧)

اثبت انه لأي عدد حقيقي x إذا كان $0 < x$ فإنه يوجد عدد y يحقق أن $y(y+1)=x$

المطلوب	المعطى
$\exists y\left[y(y+1)=x\right]$	$x>0$

مسودة الحل:

$$x>0$$

نحدد y من المعادلة $y(y+1)=x$

$$y^2+y-x=0$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$$

وحيث أن $x > 0$ إذن $1+4x > 0$ أي أن y عدد حقيقي

البرهان:

لنأخذ x عدد حقيقي اختياري. ولنفرض $x > 0$.

$$y = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$$

واضح أن y عدد حقيقي لأن مابداخل الجذر موجب.

$$y(y+1) = \left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}+1\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+4x}+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1+4x-1}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

أي أنه $\exists x \left[y(y+1) = x \right]$

تمارين

١. أثبت أنه إذا كان $A, C-B$ مجموعتين منفصلتين فإن $A \cap B \subseteq C$.

٢. اثبت انه إذا كان $A \subseteq P(A)$ فإن $P(A) \subseteq P(P(A))$.

٣. اثبت انه إذا كان $A \subseteq B - C$ فإن A, C مجموعتين منفصلتين.

٤. ليكن x عدد حقيقي.

أ- اثبت أنه إذا كان $x \neq 1$ فإنه يوجد عدد

حقيقي y بحيث أن $x = \dfrac{y+1}{y-2}$

ب- اثبت انه إذا وجد عدد حقيقي y بحيث

أن $x = \dfrac{y+1}{y-2}$ فإن $x \neq 1$

٥. ليكن a, b, c أعداد صحيحة.

أ- اثبت انه إذا كان $a \mid c, a \mid b$ فإن $a \mid (b+c)$

($x \mid y$: y تقبل القسمة على x ونقرأها x تقسم y)

ب- اثبت أنه إذا كان $c \neq 0, ac \mid bc$ فإن $a \mid b$.

٦. حدد الخطأ في البرهان التالي:

نظرية:

لكل عدد حقيقي x, $x^2 \geq 0$.

البرهان:

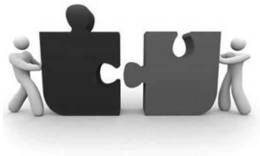
لنفرض أن النظرية غير متحققة. إذن لكل x حقيقي $x^2 < 0$. إذا أخذنا $x = 3$ نجد أن $9 < 0$ وهذا خطأ. إذن وصلنا إلى تناقض. إذن النظرية صحيحة

٧. حدد الخطأ في البرهان التالي:

نظرية (غير صحيحة)

إذا كان $\forall x \in A \, (x \neq 0)$ و $A \subseteq B$ فإن $\forall x \in B \, (x \neq 0)$

البرهان:



لنأخذ x اختياري من A حيث أن

$\forall x \in A \left(x \neq 0 \right)$ إذن $x \neq 0$ وحيث أن $A \subseteq B$ فإن $x \in B$ وحيث

أن $x \in B$ إذن $x \neq 0$. حيث أن x اختياري يمكننا القول أن $\forall x \in B \left(x \neq 0 \right)$

١–٥– ب :العبارات المسورة (Quantifiers Propositions)❄

تعريف (١–٥–٣)

يقال عن التقرير p أنه مفتوح (جملة مفتوحة أو تقرير مفتوح) (open statement)
على A إذا احتوى p متغير أو متغيرات ولا يمكن الحكم على صدقه أو كذبه إلا بعد استبدال ذلك المتغير أو تلك المتغيرات بقيم من A ويطلق على A مجال المناقشة .ويرمز عادة للتعبير المفتوح بالرمز $p\left(x \right)$ أو $p\left(x_1, x_2, ..., x_n \right)$ حيث المتغير x أو المتغيرات $x_i \quad i = 1, 2, ..., n$ تتغير على مجال المناقشة A.

مثال(١–٥–٤)

حدد قيم صواب التقارير المفتوحة التالية :

(١) لتكن A المثلثات من الهندسة الاقليدية وليكن $p\left(x \right)$ هو التقرير x مثلث قائم الزاوية

(٢) لتكن A الأعداد الحقيقية وليكن $p\left(x \right)$ هو التقرير x عدد حقيقي يحقق

$x + 1 > 1$

❄هذا أسلوب أخر لفهم الموضوع ياحبذا الأطلاع عليه .